Tentamen Metrische Ruimten
13 april 2011, 14:00 - 17:00 uur

De vragen mogen zowel in het Nederlands als in het Engels beantwoord worden.

Opgave 1

(a) Bewijs dat de open verzamelingen $\emptyset$, $\mathbb{N}$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, een topologie vormen voor $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(b) Bewijs dat $\mathbb{N}$ met deze topogie niet compact is en ook niet Hausdorff is.

Opgave 2

Laat (X, d) een metrische ruimte zijn en $f : X \to X$ een afbeelding van X naar X.

(a) Laat zien dat voor alle $x, y \in X$ geldt

$$|d(f(x), x) - d(f(y), y)| \leq d(f(x), f(y)) + d(x, y).$$

(b) Neem nu aan dat $f : X \to X$ continu is. Bewijs dat de afbeelding $g : X \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = d(f(x), x)$ ook continu is.

(c) Neem nu ook aan dat X compact is en dat voor elke $x \in X$ geldt $f(x) \neq x$. Bewijs dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodat $d(f(x), x) \geq \varepsilon$ voor elke $x \in X$. (Hint: in een compacte ruimte bereikt een continue functie zijn extreme waarden.)

Opgave 3

(a) Laat $f : X \to Y$ een continue surjectieve afbeelding zijn van een pad-samenhangende topologische ruimte X, naar een topologische ruimte Y. Bewijs dat Y pad-samenhangend is.

(b) Bewijs dat de verzameling

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

pad-samenhangend is.

Opgave 4

Voor een topologische ruimte X definiëren we de diagonaal deelverzameling Δ van $X \times X$ door

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \,:\, x \in X\}.$$

Bewijs dat X Hausdorff is dan en slechts dan als Δ gesloten is in de product topologie $X \times X$.

Tentamen Metrische Ruimten
13 april 2011, 14:00 - 17:00 uur

You can answer the exam in Dutch or English.

Exercise 1

(a) Prove that we get a topology for $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ by taking the open sets to be $\emptyset$, $\mathbb{N}$, and $\{1, 2, \dots, n\}$ for each $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove that $\mathbb{N}$ with the above topology is not compact and is not Hausdorff.

Exercise 2

Suppose that (X, d) is a metric space and consider a map $f : X \to X$.

(a) Show that for all $x, y \in X$

$$|d(f(x), x) - d(f(y), y)| \leq d(f(x), f(y)) + d(x, y).$$

(b) Suppose that $f : X \to X$ is continuous. Then prove that $g : X \to \mathbb{R}$ given by $g(x) = d(f(x), x)$ is also continuous.

(c) Further suppose that X is compact and that $f(x) \neq x$ for all $x \in X$. Then show that there is $\varepsilon > 0$ such that $d(f(x), x) \geq \varepsilon$ for all $x \in X$. (Hint: continuous functions attain their bounds in compact spaces.)

Exercise 3

(a) Suppose that $f : X \to Y$ is a surjective (onto) continuous map from a path-connected topological space X to a topological space Y. Show that Y is path-connected.

(b) Prove that the set

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

is path-connected.

Exercise 4

Given a topological space X the diagonal subset Δ of $X \times X$ is defined as

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \, : \, x \in X\}.$$

Prove that X is Hausdorff if and only if Δ is closed in the topological product $X \times X$.